RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sintesi della o-Fenilendicianguanidina dalla o-Fenilendiamina* [1]. Nota del Corrisp. Guido Pellizzari [2].

In un lavoro precedente [3] fu dimostrato che per azione del bromuro di cianogeno sulla fenilidrazina si possono introdurre tre gruppi di cianogeno in luogo dei tre atomi di idrogeno basico; ma per una trasposizione intramolecolare il prodotto che ne resulta invece della tricianfenilidrazide, è la *o*-fenilen-α-β-dicianguanidina

$$C_6H_5NH.NH_2 \xrightarrow{3CN.Br} C_6H_4\begin{cases} N \\ \diagup\!\diagdown \\ N \end{cases} C.NHCN\ (\beta)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad |$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad CN\ (\alpha)$$

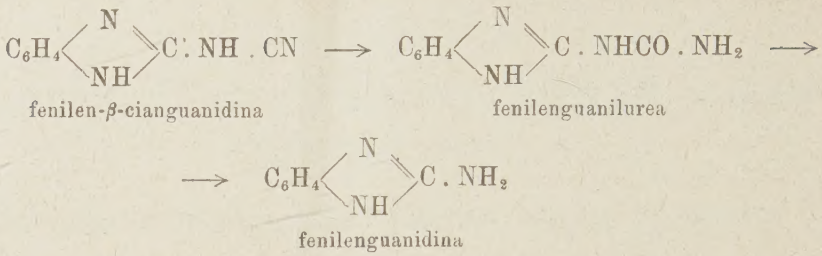
Infatti questa sostanza per idrolisi graduale prima con idrato potassico, poi

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto Superiore di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

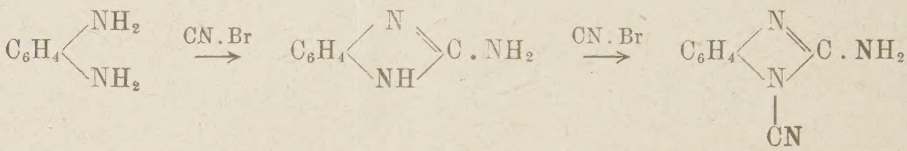
(3) Pellizzari e Gaiter, *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*. Nota IV: *Passaggio a derivati della o-fenilendiamina*. Gazz. chim. ital., 48, II, 151.

con acido cloridrico, dette i seguenti prodotti di demolizione

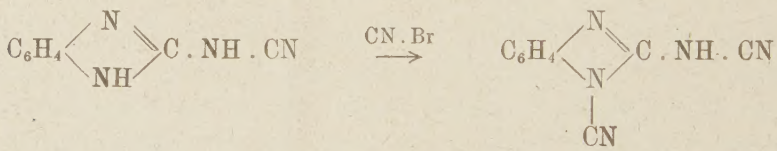


fenilen-β-cianguanidina — fenilenguanilurea — fenilenguanidina

Per la sintesi di queste sostanze dalla *o*-fenilendiamina, ricordo che l'ultimo prodotto d'idrolisi, la fenilenguanidina, era già stata ottenuta da Pierron per azione del bromuro di cianogeno sulla fenilendiamina (1). In essa per ulteriore cianurazione, Pellizzari e Gaiter (loc. cit.) riuscirono ad introdurre un gruppo cianogeno in posizione α,

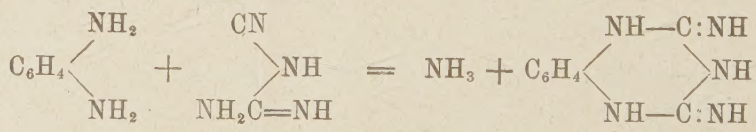


ma non riuscirono a introdurre il cianogeno in posizione β. Invece dal primo prodotto d'idrolisi, la fenilen-β-cianguanidina, trasformandola in sale sodico e facendo agire su di esso il bromuro di cianogeno ritornarono alla fenilen-α-β-dicianguanidina (2)



Siccome ora son riuscito ad ottenere anche questa fenilen-β-cianguanidina dalla *o*-fenilendiamina, passando prima alla fenilenbiguanide, ne viene di conseguenza anche la sintesi della fenilen-α-β-dicianguanidina dalla *o*-fenilendiamina.

Ziegelbauer (3) impiegando la nota reazione che conduce alle biguanidi, ebbe col cloridrato di *o*-fenilendiamina e diciandiamide una fenilenbiguanide alla quale attribuì una formula simmetrica secondo il seguente schema



(1) Ann. de chimie et phys. VIII, tom. 15, 190.

(2) Per la costituzione di queste sostanze confronta anche la Nota G. Pellizzari, *Sull'o-amidofenilurea*. Gazz. chim. ital., 49, I, 19.

(3) Monatshefte, 17, 653.

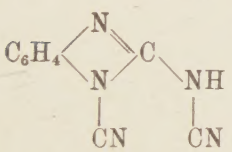
In ricerche descritte in una Nota già consegnata per la stampa alla Gazzetta chimica italiana che porta il titolo: *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina.* Nota V: *Derivati della melamina*, ho ottenuto questa stessa *o*-fenilenbiguanide partendo dalla fenilendicianguanidina con una serie di reazioni, le quali dimostrano che ad essa spetta una formula di costituzione differente da quella simmetrica data, ma non dimostrata, da Ziegelbauer; le reazioni sono le seguenti:

1°) la fenilendicianguanidina (formula I) addiziona ammoniaca e passa in fenilenisomelamina (form. II);

2°) la fenilisomelamina con acido cloridrico, subisce la trasformazione di un carboimidile in carbonile, reazione normale delle melamine, e passa in fenilenisoammelina (form. III);

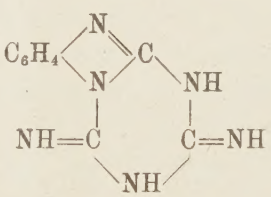
3°) per azione dell'idrato potassico si rompe l'anello melaminico, con eliminazione di anidride carbonica, e si forma la fenilenbiguanide (form. IV)

I



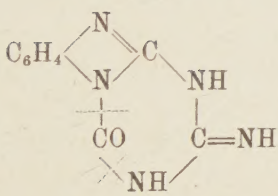
$+NH_3$

II



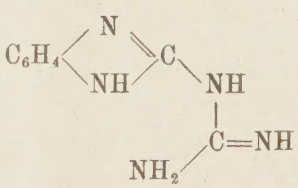
$+H_2O$

III



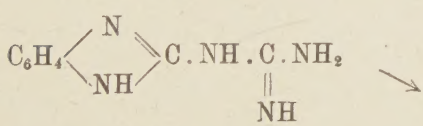
$+2H_2O$

IV

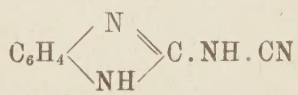


Questa formula di costituzione dell'*o* fenilenbiguanide fu poi confermata dalla sua facile trasformazione in fenilenguanilurea (form. V) per idrolisi, sostanza già ottenuta da Pellizzari e Gaiter per idratazione della fenilen-*β*-cianguanidina (form. VI).

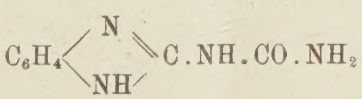
IV



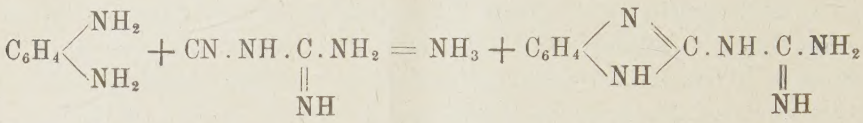
VI



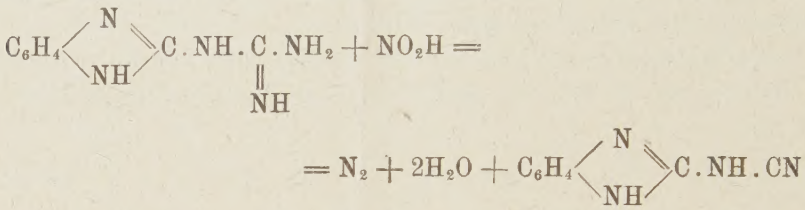
V



Quindi lo schema di formazione della fenilenbiguanide dalla *o*-fenilendiamina e diciandiamide deve esprimersi nel seguente modo:



Questa fenilenbiguanide trattata con acido nitroso, invece di dare come era presumibile la rammentata fenilenguanilurea, eliminò gli elementi di una molecola di ammoniaca per passare e con buon rendimento, nella fenilen-*β*-cianguanidina



È questa una reazione nuova prodotta dall'acido nitroso per la quale un residuo guanidico viene trasformato in un residuo della cianamide, invece che un residuo ureico

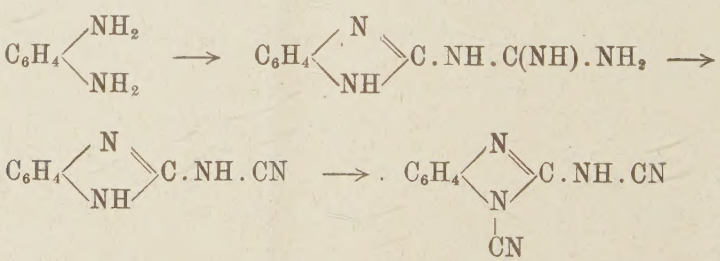
$$R.NH.C(NH).NH_2 \longrightarrow R.NH.CN$$

Con ciò viene resa possibile la sintesi della fenilendicianguanidina direttamente dall'*o*-fenilendiamina con i seguenti passaggi:

1°) cloridrato di fenilendiamina e diciandiamide dànno la fenilenbiguanide;

2°) il cloridrato di fenilenbiguanide con nitrito alcalino e acido cloridrico dànno la fenilen-*β*-cianguanidina;

3°) il sale potassico della fenilen-*β*-cianguanidina con bromuro di cianogeno dà la fenilendicianguanidina.



Il prodotto ottenuto per questa via è identico a quello che si ebbe dalla fenilidrazina e bromuro di cianogeno.

Preparazione della *o*-fenilenbiguanide.

Secondo le indicazioni di A. Ziegelbauer la preparazione vien fatta scaldando in tubo chiuso per 7 ore a 105° una soluzione alcoolica di cloridrato di *o*-fenilendiamina e diciandiamide in proporzione equimolecolare. Il prodotto viene piuttosto impuro e l'A. per purificarlo lo trasforma in nitrato che cristallizza e da questo separa la base colla soda. Con tutto ciò la fenilenbiguanide rimane impura tanto che è descritta come sostanza che si scioglie in acqua colorandola in giallo.

Io l'ho preparata più rapidamente e comodamente, più pura e con rendimento un po' maggiore nel seguente modo:

gr. 10 di cloridrato di fenilendiamina e gr. 10 di diaciandiamide (circa il doppio della quantità equimolecolare) furono sciolti in 100 cc di acqua e la soluzione si fece bollire a ricadere per 5-6 ore; l'ammoniaca che si forma va via e quindi non ha luogo di reagire, come in tubo chiuso, sopra una parte della diciandiamide in concorrenza colla fenilendiamina. Finita la reazione si precipitò la base colla soda caustica e si ricristallizzò due volte dall'acqua con un po' di carbone animale. Quando la sostanza è greggia o non ben purificata effettivamente dà una soluzione giallina, ma questa impurezza si può togliere oltre che con ripetute cristallizzazioni, anche sciogliendo la base in acido cloridrico diluito ed aggiungente una piccola quantità di nitrito alcalino: quel poco acido nitroso che si sviluppa, attacca di preferenza l'impurezza distruggendola e colla soda si ottiene la base che cristallizzata dall'acqua è in lamine lucenti madreperlacee che si decompongono a 254°. Per le altre proprietà della sostanza e per i suoi sali rimando alla Nota di Ziegelbauer ed alla mia sui *Derivati della melamina* di prossima pubblicazione.

Azione dell'acido nitroso sulla fenilenbiguanide.

Gr. 5 di fenilenbiguanide furono sciolti in 100 cc. di acqua coll'aggiunta di 10 cc. di acido cloridrico concentrato e quindi si aggiunsero a diverse riprese a freddo gr. 2,5 di nitrito potassico (circa 1 mol.). Il liquido si fece giallino con lento sviluppo di azoto e dopo poco si vide separarsi una sostanza cristallina leggera che fu raccolta dopo 24 ore: il liquido coll'aggiunta di gr. 1,25 di nitrito alcalino dette ancora nuovo prodotto che in tutto era gr. 3,91 con un rendimento dell'81,4 % del teorico: nelle acque madri non si trovò neppur traccia di fenilenguanilurea. La fenilen-*β*-cianguanidina così ottenuta purificata dall'acqua bollente con un po' di carbone animale si ebbe nei caratteristici aghi sottili, lunghi, splendenti, elastici già descritti da P. e G. decomponibili fra 250° e 260°:

gr. 0,2646 di sostanza dettero gr. 0,5869 di anidride carbonica e gr. 0,0956 di acqua;
gr. 0,0566 di sostanza dettero 17,3 cc. di azoto a 17° e 760 mm.;
trovato % C = 60,77; H = 4,07; N = 35,45;
calcolato per la fenilencianguanidina C = 60,75; H = 3,79; N = 35,44.

Una parte della fenilencianguanidina così ottenuta sciolta in acqua e potassa secondo le indicazioni di P. e G. (loc. cit., pag. 180) per azione del bromuro di cianogeno fu trasformata in fenilendicianguanidina identica a quella ottenuta dalla fenilidrazina. Come metodo pratico di preparazione credo però sia preferibile quello dalla fenilidrazina.

In una prossima Nota riferirò sopra esperienze eseguite con successo per generalizzare la reazione dell'acido nitroso sopra altri composti guanidici.

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie.* IV: *Rappresentazione tipica dei covarianti.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI (1).

13. Il problema di raccogliere l'insieme delle forme invariantive dedotte da una o più forme originarie, in un campo di razionalità o d'integrità a base finita, può, per la sua importanza, e per il vasto contributo apportatovi da eminenti Autori, considerarsi come fondamentale per la teoria che ci occupa.

Prima che Gordan, nel 1868, pervenisse a stabilire l'esistenza di *sistemi completi di forme invariantive* inerenti ad una data binaria f, mediante le quali tutte le altre si esprimono in modo razionale intero, un passo importante, nel dominio di razionalità, era stato fatto da Hermite mediante la *rappresentazione tipica* (2).

Il teorema di Hermite stabilisce che ogni covariante (ed invariante) di f è eguale ad una funzione intera di f e di certi $n-1$ covarianti $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$ *divisa* per una potenza della f stessa. Esso è stato successivamente perfezionato da Clebsch che sostituì al primitivo sistema dei *covarianti associati* (ad f) di Hermite, altri sistemi notevolmente più semplici (3).

Nel nostro ordine di vedute, i problemi accennati s'interpretano come inerenti alla ricerca d'una *base* per le *ipersuperficie o forme seminvarianti*,

(1) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

(2) Hermite, *Second Mémoire sur les fonctions homogènes à deux indéterminées* [Journal für Mathematik, LII (1856), pp. 18-38], § III.

(3) Cfr. Clebsch, *Binären Formen* (cit.), Cap. VII.

intendendo come tali quelle forme dello $S_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ che si ottengono eguagliando a zero un seminvariante di f. E invero, come segue dal teorema di Bruno dimostrato al n. 5, ogni relazione algebrica tra seminvarianti produce una relazione formalmente identica tra i relativi covarianti, e viceversa.

È da una tale concezione del problema, convenientemente trasformata ed elaborata, che mi propongo di dedurre in questa Nota la rappresentazione tipica dei covarianti.

14. Riprendiamo la considerazione del *gruppo* Ω *delle similitudini* di C^n che caratterizza i seminvarianti di f. Diremo che due punti P e Q di S^n sono *equivalenti* rispetto a tal gruppo, se esiste in esso qualche trasformazione *non degenere* che muta P in Q.

L'insieme dei punti di S_n equivalenti ad un generico punto P, inclusivi per ovvie ragioni d'algebricità anche i punti limiti di successioni di punti equivalenti a P [1], è una superficie algebrica F variabile in un sistema algebrico M, ∞^{n-2}, d'indice 1.

Una ipersuperficie seminvariante Δ_U di S_n, contiene ovviamente la F passante per un suo punto generico; sicchè se le F si concepiscono come elementi d'una varietà W_{n-2} (*algebrica*, anzi, come vedremo tra poco, *razionale*) la Δ_U è ivi rappresentata da una V_{n-3}, e viceversa ad ogni V_{n-3} di W (escluse eventualmente convenienti V_{n-3} *fondamentali*) corrisponde un seminvariante di f.

Possiamo anche sostituire alla W l'*involuzione* segata dalle F sopra una V_{n-2} di S_n, ad esempio sopra uno spazio lineare S_{n-2}; la determinazione dei seminvarianti di f si riduce allora a quella delle V_{n-3} *appartenenti* a tale involuzione.

15. Indichiamo con S uno spazio S_{n-2} passante per lo S_{n-3} osculatore a C^n in U e non contenuto nello S_{n-1} osculatore $a_n = 0$. Assunto questo S_{n-3} come spazio improprio entro S coll'introduzione di coordinate non omogenee $z_i = \frac{a_i}{a_0}$, le equazioni di S saranno del tipo $z_1 = m_1$, $z_2 = m_2$.

Tenendo conto delle equazioni di Ω, che, a norma del n. 2, si possono scrivere p. es. sotto la forma

$$(8) \qquad \lambda^i z_i' = \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} z_h \mu^{i-h}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n \; ; \; z_0 = 1),$$

(λ, μ parametri), si stabiliscono facilmente le proprietà seguenti:

a) Se non è $m_1^2 - m_2 = 0$, cioè se S non è uno spazio generatore del *cono seminvariante hessiano* $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, esiste una ed una sola

[1] L'omologo di P per una trasformazione degenere di Ω può essere indeterminato, ma non lo è se quella trasformazione si considera come limite d'una trasformazione non degenere, per una variazione continua dei parametri.

trasformazione di Ω che muta un punto proprio P di S in un altro punto (non dato) di S, e questa è l'involuzione di Ω corrispondente ai valori $\lambda = -1$, $\mu = -2m$, dei parametri;

b) ogni punto proprio d'un generico S è equivalente a *due* ben determinati punti pure proprî d'un altro S generico.

Dalla *a*) segue che ogni F del sistema M, sega S, fuori di punti fissi (improprî) in *due* punti coniugati in una involuzione I_2 generata da una proiettività involutoria (e perciò *razionale*). Se in particolare, come faremo in seguito, si pone $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ le equazioni della proiettività generante I_2, che si ottengono dalla (8) per $\lambda = -1$, $\mu = 0$, sono

$$(9) \qquad z_i' = (-1)^i z_i, \qquad (i = 3, 4, \ldots, n).$$

L'osservazione *b*) permette di determinare quali sono le forme seminvarianti che segano un prefissato S generico soltanto in punti improprî. In forza della *b*) esse devono comportarsi analogamente rispetto agli altri S generici, e quindi son *coni* aventi per vertice lo S_{n-3} osculatore a C^n in U, cioè corrispondono a covarianti $n-2$ conici. Tali covarianti sono *proiezioni* (n. 6) di covarianti delle forme quadratiche e quindi si riducono alla *forma*, all'*hessiano* o a prodotti di loro potenze intere e positive; di guisa che i seminvarianti cercati sono del tipo $a_0^\alpha (a_0 a_2 - a_1^2)^\beta$.

16. Sia ora Φ un covariante di f, φ il relativo seminvariante. L'ipersuperficie $\varphi = 0$ segherà su $S(z_1 = 0, z_2 = 1)$ una V_{n-3} mutata in sè dalla (9), cioè *appartenente* all'involuzione I_2; e viceversa, data una tale V_{n-3}, applicando ad essa le trasformazioni di Ω se ne dedurrà una forma seminvariante φ.

Ne segue che due seminvarianti i quali seghino su S, fuori d'intersezioni improprie, la stessa V_{n-3} non possono differire che per fattori del tipo $a_0^\alpha (a_1^2 - a_0 a_2)^\beta$, giacchè, per quanto precede, ogni loro parte irriducibile è *individuata* dalla sua intersezione con S, a meno che questa non si riduca allo S_{n-3} improprio.

17. Indichiamo ora con

$$(10) \qquad \psi(z_3, z_4, \ldots, z_n) = 0,$$

l'equazione della V_{n-3} staccata su S dal seminvariante φ. Come faremo a dedurne l'espressione di φ?

Anzitutto converrà tener conto che la (10) dev'essere mutata in sè dalla proiettività (9); e perciò occorre e basta che *in ogni termine della* (10) *il numero dei fattori d'indici dispari abbia la stessa parità.*

Inoltre le considerazioni precedenti suggeriscono di cercare delle formule che esprimano le coordinate d'un punto di S in funzione di quelle del generico punto equivalente di S_n. Sostituendo quelle espressioni al posto delle z nel primo membro della (10), e riducendo a forma intera, dovrà

ottenersi, a meno di fattori o divisori del tipo $a_0^{\alpha}(a_0 a_2 - a_1^2)^{\beta}$, il cercato seminvariante φ.

18. A conferma delle previsioni, veniamo agli sviluppi effettivi. Poniamo nelle (8) $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_i' = \dfrac{a_i}{a_0}$, e risolviamole rispetto a $z_3, z_4, \ldots, z_n$ *eliminando* λ, μ. Avremo con qualche calcolo

$$z_i = g_i g_2^{-\frac{i}{2}}, \qquad (i = 3, 4, \ldots, n), \tag{11}$$

le forme g_i delle variabili a_i essendo date dalle espressioni

$$g_i = (-1)^i \sum_{h=0}^{i} (-1)^h \binom{i}{h} a_0^{h-1} a_1^{i-h} a_h. \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{12}$$

Poichè gli S_{n-3} coordinati $z_3 = 0$, $z_4 = 0, \ldots, z_n = 0$ sono mutati in sè dalla (9), così $g_3, g_4, \ldots, g_n$ saranno seminvarianti di f; e lo stesso può dirsi di g_2 giacchè, come si ricava dalla (12) $g_2 = a_0 a_2 - a_1^2$, è il *seminvariante hessiano* di f.

Tratteniamoci brevemente su questi seminvarianti, e sui corrispondenti covarianti che indicheremo con $G_2, G_3, \ldots, G_n$.

Anzitutto, poichè g_i è di grado e peso uguali ad i, dalla formula $m = 2p - nl$ [1] che dà l'ordine m d'un covariante in funzione del grado l, e del peso p del suo termine principale, abbiamo:

Il covariante G_i *ha grado* i *ed ordine* $(n-2)i$.

Inoltre poichè g_i non contiene $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$, così si ha che:

Il covariante G_i *è* $n-i$ *conico e si ottiene per proiezione dal covariante analogo delle forme d'ordine* i. *L'unico covariante non conico è* G_n, *che ha rango* 1.

L'interpretazione geometrica dei covarianti trovati, si riduce dunque a quella di G_n, che può così enunciarsi:

L'ipersuperficie Δ_P *relativa al covariante* G_n *è caratterizzata dalle proprietà seguenti*:

1) *È d'ordine n ed ha come spazio* $(n-1)$*-plo lo* S_{n-1} *osculatore a* C^n *in* P;

2) *Passa semplicemente per la* C^n *toccandone in ogni punto lo* S_{n-1} *osculatore*. Omettiamo la semplice analisi formale dimostrativa [2].

[1] Questa formula può dimostrarsi geometricamente, ma ci dispensiamo dal farlo, per brevità.

[2] I nostri covarianti G_i moltiplicati per f, dànno i covarianti *associati ad* f di Hermite. Cfr. i termini principali dati dalla (12) con quelli assegnati per $n = 2, 3, 4, 5$ dal predetto A, nella citata Memoria. I G_i stessi coincidono poi coi covarianti che Clebsch al Cap. VII del suo trattato indica con φ_i, come prova una opportuna verifica.

19. Sostituiamo ora nel primo membro della (10) al posto delle z_i le loro espressioni (11). Eseguendo i calcoli, e tenuto conto della condizione a cui deve soddisfare ψ, si trova che il numeratore della trasformata è una forma $\Psi(g_2, g_3, \dots, g_n)$, *isobarica* nelle g, e tale che ponendovi $a_1 = 0$, $a_0 = a_2$ ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$) se ne deduce la ψ resa omogenea e moltiplicata per una potenza di a_0. Ne segue che il seminvariante Ψ stacca su S la stessa V_{n-3} segata da φ (a meno d'intersezioni improprie); e pertanto si ha (n. 16)

$$\varphi \equiv a_0^{\alpha} g_2^{\beta} \Psi(g_2, g_3, \dots, g_n) \quad (\alpha, \beta \text{ interi}).$$

Se β fosse negativo, il polinomio Ψ nelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ dovrebbe risultare divisibile per g_2^{β}; ma basta porre $a_1 = 0$ tenendo conto delle (12) per riconoscere che ciò può avvenire solo se la condizione di divisibilità è soddisfatta considerando Ψ come funzione di $g_2, g_3, \dots, g_n$.

In altre parole $g_2^{\beta}\Psi$ è pure funzione intera (e isobarica) delle g; indicandola ancora con Ψ, e passando dai seminvarianti ai covarianti, avremo dunque il teorema:

Ogni covariante od invariante Φ d'una forma binaria f d'ordine n può rappresentarsi coll'espressione

$$\Phi \equiv f^{\lambda} \Psi(G_2, G_3, \dots, G_n),$$

nella quale λ è un numero intero positivo o negativo, e Ψ una forma isobarica degli $n-1$ covarianti G_i i cui termini principali sono dati dalla (12).

Matematica. — *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes.* Nota di S. LEFSCHETZ, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Dans cette Note, écrite sur l'invitation très aimable de M. Castelnuovo, j'avais d'abord l'intention d'exposer ma solution de la question qu'il traite dans ce même fascicule des Rendiconti, telle que je l'avais donnée dans mon Mémoire Bordin. À la réflexion il m'a paru plus intéressant de revenir sur la question et de montrer, ce que je n'avais pu faire alors faute de temps, comment ma méthode permet d'arriver au théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes en se basant *uniquement* sur les propriétés de définition de ces fonctions.

Soit donc Ω une matrice à p lignes et $2p$ colonnes et $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une fonction de p variables complexes. On suppose que

a) Le parallélépipède aux périodes, U, correspondant à Ω de la manière usuelle, est à $2p$ dimensions, fermé.

b) La fonction φ est entière ou méromorphe, avec au moins *un* zéro, l'ensemble de *tous* ses zéros restant invariant quand on ajoute les périodes aux u.

c) Il n'existe pas de combinaison linéaire des u s'annulant en tout point de cet ensemble.

Il s'agit de montrer, en partant de ces seules hypothèses, que Ω est, selon la locution maintenant classique de M. Scorza, une matrice de Riemann — c'est là le théoreme fondamental.

2. Il résulte d'abord de suite de *b*) que l'ensemble des zéros forme une multiplicité analytique à $2p-2$ dimensions. Considérant les éléments de la frontière de U qui sont parallèles, comme homologues au sens usuel de l'Analysis Situs, on définit une multiplicité fermée que nous appelerons toujours U. Numérotons les arètes partant d'un même sommet, $1, 2, \ldots, 2p$, la μ^{e} correspondant à la μ^{e} colonne de Ω. Les faces à k dimensions forment base minima pour les cycles à k dimensions — nous les désignerons par $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, les indices entre parenthèses étant ceux des arètes correspondantes, leur ordre définissant l'orientation de la face.

3. La multiplicité E lieu des zéros de φ intérieurs à U en est un cycle à $2p-2$ dimensions.

Comptons maintenant avec Poincaré les points d'intersection de deux multiplicités M, M′, positivement ou négativement suivant l'orientation relative des multiplicités en ces points, le nombre total ainsi obtenu étant désigné par (M, M'). En particulier posons $(E, (\mu, \nu)) = m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. Les m seront tous des entiers finis pour un choix convenable du système « primitif » de périodes, donc pour tout autre aussi. En se servant de la propriété que $(M, M') = 0$ si $M \sim 0$ ou $M' \sim 0$, on trouve aisément

$$E \sim \Sigma (-1)^n \cdot m_{i_1 i_2} (i_3, i_4, \ldots, i_{2p});$$

$(i_1 < i_2 ; i_3 < i_4 < \cdots < i_{2p}$; n nombre de permutations dans la série des $i)$.

La fonction $\varphi(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ a exactement les mêmes propriétés que φ, et il y a un cycle correspondant $\sim E$ — désignons par E^2 son intersection avec le premier, en adoptant une définition convenable pour son orientation. On trouve de même

$$E^2 \sim 2 \Sigma (-1)^n m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} (i_5, i_6, \ldots, i_{2p})$$
$$(i_1 < i_2 ; i_3 < i_4 ; i_5 < i_6 < \cdots < i_{2p}).$$

Ceci peut-être continué et on trouve finalement

$$E^{p-1} \sim \frac{(p-1)!}{2\pi} \Sigma M_{\mu\nu} (\mu, \nu)$$

où $M_{\mu\nu}$ est le coefficient de $m_{\mu\nu}$ dans le développement du déterminant de

la forme alternée à coefficients entiers

$$F = \Sigma m_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

et π en est le pfaffien. La forme alternée à coefficients entiers

$$\Phi = \Sigma M_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

est donc l'inverse de F.

4. On montre maintenant facilement que

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} du_j \, du_k = \Sigma M_{\mu\nu} \omega_{j\mu} \omega_{k\nu} = 0 .$$

De plus soient $v = v' + iv''$ une combinaison linéaire quelconque des u, $\xi_\mu + i\eta_\mu$ sa période correspondant à la μ^e colonne de Ω, $x = x' + ix''$ une fonction analytique de point sur E^{p-1}. On a

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} dv' \, dv'' = \frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy$$

$$= \Sigma M_{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu \neq 0$$

et par suite Ω, qui possède la forme principale Φ, est bien une matrice de Riemann. *Le théorème fondamental est donc démontré.*

Dans le cas de M. Castelnuovo on démontre que ses coefficients $m_{\mu\nu}$ ont bien le sens que nous leur avons attribué d'où son résultat s'ensuit.

Disons seulement pour terminer que par cette méthode on obtient tous les éléments d'une exposition de la théorie des fonctions abéliennes où l'on se passerait presque complètement des formules assez compliquées de la théorie des fonctions thêtas.

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* I: *Le funzioni intermediarie.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

Il prof. Lefschetz, nella Memoria ancora inedita che ottenne il premio Bordin dall'Accademia di Parigi, stabilì alcuni importanti risultati sulle funzioni abeliane, con un metodo molto notevole fondato su considerazioni di *Analysis Situs*, del quale trovasi un cenno nella Nota che precede questa mia. Io stesso ero arrivato da qualche tempo ad analoghi risultati seguendo una via puramente analitica, che fu, a dir vero, già indicata dal Frobenius, ma qui viene sfrondata da parti accessorie, notevolmente proseguita, e messa in maggior luce ricorrendo alle geniali vedute dello Scorza e al linguaggio della geometria algebrica. La stessa via permette di esten-

dere e semplificare i procedimenti applicati dal sig. Humbert al caso di due variabili (¹). Ritengo perciò opportuno raccogliere le mie ricerche in questa Nota e in altre successive.

1. Data una matrice di p righe e $2p$ colonne a elementi complessi

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots\dots & \omega_{1\,2p} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \omega_{p1} & \dots\dots & \omega_{p\,2p} \end{vmatrix},$$

la costruzione di una funzione abeliana di p variabili, la quale ammetta i $2p$ sistemi di periodi forniti dalle verticali della (1), può ricondursi, come è noto, alla costruzione di funzioni *intermediarie*, cioè funzioni olomorfe al finito $\varphi(u_1, \dots u_p)$ dotate di una quasi-periodicità definita dalle $2p$ uguaglianze

$$(2) \qquad \varphi(u_1 + \omega_{1l}, \dots, u_p + \omega_{pl}) = \varphi(u_1, \dots, u_p)\, e^{-2\pi i(\lambda_{1l}u_1 + \dots + \lambda_{pl}u_p) + \mu_l} \qquad (l = 1, 2, \dots, 2p).$$

Le λ e le μ sono costanti, quest'ultime prive di interesse.

Sotto quali condizioni esistono siffatte funzioni?

Supposto che esista la funzione $\varphi((u))$ soddisfacente alle (2), formiamo coi *periodi* ω e colle λ (dette talvolta *periodi di seconda specie*) il determinante

$$(3) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots\dots & \omega_{1\,2p} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \omega_{p1} & \dots\dots & \omega_{p\,2p} \\ \lambda_{11} & \dots\dots & \lambda_{1\,2p} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \dots\dots & \lambda_{p\,2p} \end{vmatrix}.$$

Vedremo che δ è un intero; potremo supporre $\delta \geqq 0$, eseguendo, se occorre, uno scambio tra due verticali del determinante. Chiameremo δ il *determinante* della funzione φ.

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

a) Le espressioni

$$(4) \qquad \omega_{1i}\lambda_{1k} - \omega_{1k}\lambda_{1i} + \dots + \omega_{pi}\lambda_{pk} - \omega_{pk}\lambda_{pi} = m_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, 2p)$$

(¹) Frobenius, Journal für d. r. u. a. Mathem., vol. *97* (1883); Humbert, Journal de Math. (V^e s.), voll. *5* e *6* (1899-1900); Scorza, Rendic. Circolo Matem. di Palermo, tomo *41* (1916). Mentre correggo le bozze mi giunge la notizia della morte di G. Humbert. Invio un reverente saluto alla memoria di questo scienziato, le cui belle ricerche sulle funzioni abeliane hanno ispirato, nell'ultimo decennio, tanti lavori della scuola italiana.

hanno valori interi (detti *interi caratteristici* della φ); si giustifica calcolando in due modi diversi, mediante le (2), $\varphi((u_h + \omega_{hi} + \omega_{hk}))$.

b) Segue, eseguendo opportunamente il quadrato della (3),

$$\delta^2 = \|m_{ik}\| \qquad (m_{ik} = -m_{ki}). \tag{5}$$

Dunque δ è un numero intero, uguale (fatta astrazione dal segno) al pfaffiano del determinante sghembo simmetrico (5).

c) Se alle variabili u_h e ai periodi ω_{hi} si sostituiscono loro combinazioni lineari indipendenti U_h, Ω_{hi}, anche i periodi di seconda specie λ subiscono una trasformazione lineare, ma non mutano nè gli interi caratteristici m_{ik}, nè δ.

d) La funzione φ moltiplicata per un esponenziale ad esponente quadratico nelle u, $e^{-\pi i \Sigma a_{ik} u_i u_k}$, fornisce una nuova funzione intermediaria cogli stessi periodi di prima specie ω; i periodi di seconda specie si alterano, ma non mutano nè le m_{ik}, nè δ.

e) Si eseguisca sulle verticali della matrice (1) una sostituzione a coefficienti interi e determinante non nullo:

$$\omega'_r = a_{r1}\,\omega_1 + \cdots + a_{rp}\,\omega_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p); \tag{6}$$

in queste è omesso il primo indice delle ω, ω', il quale deve avere lo stesso valore $(1, 2, \ldots, p)$ a sinistra e a destra. La φ può considerarsi come una funzione intermediaria delle variabili u coi nuovi periodi ω'. I periodi di seconda specie subiscono la medesima trasformazione lineare, e gli interi caratteristici m_{ik} si mutano in nuovi interi caratteristici m'_{ik} colla legge secondo la quale i coefficienti della forma alternata

$$\Sigma m_{ik}\,\xi_i\,\eta_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{7}$$

si mutano nei coefficienti della forma alternata $\Sigma m'_{ik}\,\xi'_i\,\eta'_k$ quando si passa dalle variabili ξ, η alle ξ', η' mediante la sostituzione (6). Il determinante δ si muta in $\delta' = \delta\,\|a_{rs}\|$.

2. La forma alternata (7), che diremo collegata alla φ, ha un significato notevole relativamente alla matrice (1). Per metterlo in rilievo riguardiamo, colla Scorza, le orizzontali della (1) come contenenti le coordinate omogenee di p punti di uno spazio lineare S_{2p-1}, i quali determinano ivi uno spazio S_{p-1} che indicheremo con τ. Siano poi le ξ e le η coordinate di due iperpiani (S_{2p-2}) passanti per τ, tali adunque che

$$\sum_{i=1}^{2p} \xi_i\,\omega_{hi} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{2p} \eta_k\,\omega_{hk} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{8}$$

Moltiplicando i due membri della (4) per $\xi_i\,\eta_k$ e sommando rispetto agli indici i, k, si trova

$$\Sigma m_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0.$$

Questa rappresenta una reciprocità nulla (inviluppo) in S_{2p-1}, la quale muta ogni iperpiano passante per τ in un punto di τ. Segue, se $\delta \neq 0$, che la detta reciprocità nulla, considerata come luogo e rappresentata dall'annullarsi della forma reciproca

$$\sum M_{ik}\, x_i\, y_k\,, \tag{9}$$

dove M_{ik} è il complemento algebrico di m_{ik} entro $|m_{ik}|$, muta ogni punto di τ in un iperpiano per τ. Dunque la (9) si annulla se al posto delle $(x_1, \ldots, x_{2p})$, $(y_1, \ldots, y_{2p})$ poniamo gli elementi di due righe qualsiansi della matrice (1). La forma (9) è, secondo lo Scorza, una *forma alternata di Riemann* della matrice (1). L'esistenza supposta di una funzione intermediaria cogli interi caratteristici m_{ik} porta l'esistenza di una tal forma, cioè di una relazione alternata tra le orizzontali della matrice.

3. È noto che con una opportuna sostituzione lineare a coefficienti interi, del tipo (6) e di modulo $||a_{rs}|| = \pm 1$, eseguita nel tempo stesso sulle ξ e le η, la forma alternata (7) si muta nella forma canonica

$$\sum_{i=1}^{p} e_i\,(\xi'_i\,\eta'_{i+p} - \xi'_{i+p}\,\eta'_i) \tag{10}$$

dove le e_i sono interi positivi. La stessa sostituzione applicata ai periodi ω li muta in periodi ω' tali che, rispetto ad essi, la funzione intermediaria φ ha i nuovi interi caratteristici (n. 1, *e*)

$$m'_{i,i+p} = e_i \quad , \quad m'_{ik} = 0 \quad \text{se} \quad k - i \neq \pm p\,. \tag{11}$$

La forma di Riemann (9) si trasforma (salvo un fattore intero) nella nuova forma di Riemann

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{e_i}\,(x'_i\,y'_{i+p} - x_{i+p}\,y'_i)\,, \tag{12}$$

che si annulla se vien costruita coi periodi ω' di due orizzontali qualsiansi della nuova matrice.

Riduciamo questa alla forma canonica

$$\begin{vmatrix} e_1 & 0 & \ldots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1p} \\ 0 & e_2 & \ldots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e_p & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \ldots & \sigma_{pp} \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}) \tag{13}$$

con una trasformazione lineare eseguita contemporaneamente sulle variabili u e sulle orizzontali della matrice (1) (n. 1, *c*). La $\varphi((u))$ si muterà in una nuova funzione intermediaria $\varphi_1((U))$ coi periodi di prima specie (13) e gli interi caratteristici (11). Moltiplicando φ_1 per un esponenziale del tipo $e^{-\pi i \sum \alpha_{ik} U_j U_k}$ (n. 1, *d*), si ottiene una terza funzione intermediaria $\varphi_2((U))$ coi periodi di prima specie (13), gli interi caratteristici (11) e certi periodi di

seconda specie λ'_{ik}, dei quali si può supporre (scegliendo opportunamente i parametri α_{ik}), che siano nulli tutti quelli per cui $i - k \geqq 0$. Allora, tenendo presenti le (11), si vede che per questa φ_2 il determinante (3), il cui valore non è cambiato, assume l'aspetto

$$(14) \qquad \delta = \begin{vmatrix} e_1 \dots 0 & \sigma_{11} \dots \sigma_{1p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots e_p & \sigma_{p1} \dots \sigma_{pp} \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki});$$

e le proprietà di periodicità si presentano sotto la forma semplicissima

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_2(U_1, \dots, U_l + e_l, \dots, U_p) = \varphi_2(U_1, \dots, U_l, \dots, U_p) \\ \varphi_2(U_1 + \sigma_{1l}, \dots, U_p + \sigma_{pl}) = \varphi_2(U_1, \dots, U_p)\, e^{-2\pi i\, U_l + v_l} \end{cases} \quad (l = 1, 2 \dots p)$$

4. Se $\delta = 1$ e quindi $e_1 = \dots = e_p = 1$, la φ_2 è una funzione Θ del primo ordine relativa ai periodi (13). In caso opposto eseguiamo la trasformazione di variabili

$$(16) \qquad U_l = \delta v_l = e_1 \dots e_p\, v_l$$

ed assumiamo come nuovi periodi i numeri della tabella

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} 1 \dots 0 & \tau_{11} \dots \tau_{1p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots 1 & \tau_{p1} \dots \tau_{pp} \end{vmatrix} \qquad \left(\tau_{ik} = \tau_{ki} = \frac{\sigma_{ik}}{\delta}\right).$$

La $\varphi_2((U))$ diviene una funzione $\Theta((v))$ che soddisfa alle seguenti relazioni:

$$(18) \quad \begin{cases} \Theta(v_1 \dots, v_l + 1 \dots, v_p) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p) \\ \Theta(v_1 + \tau_{1l}, \dots, v_p + \tau_{pl}) = \Theta(v_1, \dots, v_p)\, e^{-2\pi i(v_l + v'_l)} \end{cases} \quad (l = 1, 2, \dots p)$$

Si tratta dunque di una funzione Θ, propriamente detta, avente l'ordine δ. È una Θ particolare, perchè si ha pure

$$(19) \qquad \Theta\left(v_1, \dots, v_l + \frac{e_l}{\delta}, \dots, v_p\right) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p).$$

Si ricordi ora che per la esistenza di una funzione Θ coi periodi (17) è necessario (e sufficiente) che la forma alternata

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{p} (X_i\, Y_{i+p} - X_{i+p}\, Y_i)$$

assuma un *segno costante* (positivo) quando al posto delle X e delle Y si pongono le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una combinazione lineare $\sum_{i=1}^{p} \varrho_i\, v_i$ delle variabili, *qualunque siano* i va-

lori attribuiti ai parametri ϱ. Ora, poichè la (20) è la trasformata della forma (9) attraverso le successive trasformazioni a coefficienti *reali* eseguite sulle x, y e sui periodi (1), segue che *la forma* (9) *conserva sempre lo stesso segno quando al posto delle* x *e delle* y *si pongano le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare delle variabili primitive* $u_1, \ldots, u_p$. Diremo collo Scorza che la (9) è una forma riemanniana *principale* della matrice (1).

In conclusione, e tenuto conto che il ragionamento si può invertire, possiamo enunciare il teorema:

Affinchè esista una funzione intermediaria coi periodi (di prima specie) (1) *e gli interi caratteristici* m_{ik} *è necessario e sufficiente che la matrice* (1) *ammetta una forma alternata riemanniana principale, e precisamente la* (9), i cui coefficienti sono gli elementi del determinante aggiunto di $||m_{ik}||$.

Fate atica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota IV di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo (1).

1. Dedico questa Nota alla *interpretazione geometrica degli invarianti Gaussiani* già introdotti (2) limitandomi ad accennare i risultati per le deformazioni di 2ª specie.

2. Data una superficie di S_n ($n \geq 5$) con S_5 2-osculatore generico esiste in ogni punto P della superficie una normale ben determinata (che dirò NORMALE OMBELICALE) e su di essa un punto (che dirò CENTRO DI CURVATURA OMBELICALE), contenuta nello S_5 2-osculatore in P, caratterizzati da una delle seguenti proprietà:

1) *La proiezione ortogonale della superficie sullo* S_3 *individuato dal piano tangente in* P *e dalla normale ombelicale ha in* P *un ombelico; il centro di curvatura della superficie proiezione nell'ombelico è il centro di curvatura ombelicale.*

2) *Tutti gli* S_{n-2} *normali alla superficie nei punti infinitamente vicini a* P *incontrano lo* S_5 *2-osculatore in* P *nel centro di curvatura ombelicale (relativo a* P).

(1) Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

(2) Vedansi le 3 Note precedenti dallo stesso titolo; questi Rendic., vol. XXVIII, 2 e 3 nov. 1919; vol. XXIX, 18 genn. 1920. Ricordo che ho chiamato invarianti e covarianti Gaussiani quelli che pur contenendo derivate d'ordine $\nu+1$ delle coordinate dei punti della superficie sono tali per deformazioni di specie ν; cioè, mentre dipendono (apparentemente) dai coefficienti delle prime $\nu+1$ forme fondamentali, si possono calcolare mediante quelli di sole ν forme $L_1, \ldots L_\nu$.

3) *La normale ombelicale è la normale al piano della conica delle curvature* [considerata dal Levi (1)] *relativa al punto* P *condotta da* P; *e il centro ombelicale è il polo di questo piano rispetto alla sfera di raggio unitario e di centro* P *contenuta nello* S_3 *di* P *e della conica.*

4) *La congruenza delle normali ombelicali ad una superficie stabilisce una rappresentazione conforme fra essa e la superficie parallela costruita secondo quelle normali* (prendendo su ciascuna un segmento infinitesimo costante h); *il modulo della rappresentazione dipende soltanto dal raggio di curvatura ombelicale* (e, naturalmente, da h).

Se si prosegue con continuità la costruzione che fa passare da una superficie a quella parallela e infinitamente vicina secondo le normali ombelicali (2) si ottiene una V_3 dotata della notevole proprietà di avere le superficie del sistema costruito come quasi-asintotiche (3) nel senso che lo S_5 2-osculatore ad una di esse in un suo punto contiene lo S_3 tangente nel punto alla V_3; le loro traiettorie ortogonali (inviluppate dalle rette delle ∞^1 congruenze ombelicali) stabiliscono fra due qualsiansi di esse una corrispondenza conforme.

3. Se si indicano con $x_i(u, v)$ le coordinate cartesiane rettangolari dei punti della superficie, con D_2 la matrice (a 5 righe ed $n \geq 5$ colonne) formata con le loro derivate prime e seconde (che per ipotesi ha caratteristica 5, quindi $D_2^2 \neq 0$), i coseni direttori l_i della normale ombelicale in x, e il raggio di curvatura ombelicale ϱ sono dati da

$$l_i = \frac{H_i}{\sqrt{\Sigma H_i^2}} \quad ; \quad \varrho = \frac{\sqrt{\Sigma H_i^2}}{D_2^2},$$

avendo posto

$$H_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} & 0 \\ E & F & [1020] & [1011] & [1002] & 0 \\ F & G & [0120] & [0111] & [0102] & 0 \\ [2010] & [2001] & [2020] & [2011] & [2002] & E \\ [1110] & [1101] & [1120] & [1111] & [1102] & F \\ [0201] & [0201] & [0220] & [0211] & [0202] & G \end{vmatrix}$$

(1) E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie* ecc. [Ann. Scuola Norm. di Pisa, vol. X], n. 37.

(2) La congruenza delle normali ombelicali varia da superficie a superficie.

(3) La nozione più generale di varietà quasi-asintotica entro una varietà qualsiasi è stata da me posta fin dal 1912; cfr. *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi* [Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, August 1912].

e
$$[hklm] = \Sigma_i \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u^h \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} x_i}{\partial u^l \partial v^m} .$$

Il raggio di curvatura ombelicale ϱ è, naturalmente, un invariante (assoluto) della superficie per deformazioni di 2ª specie.

4. Ciò posto si trova facilmente che:

5) *Esistono infinite ipersfere* (V^2_{n-1}) *osculatrici ad una superficie in* P (cioè contenenti gli intorni di 1° e 2° ordine di P); *i loro centri sono nello* S_{n-5} *normale allo* S_5 *2-osculatore* (alla superficie in P) *condotto per il centro di curvatura ombelicale* (e NON per P).

6) *Se l'ambiente è uno* S_6 ($n = 6$) *fra le* ∞^1 *ipersfere osculatrici* (*che determinano in* P *una involuzione di terne di tangenti*) *ve ne sono* QUATTRO *tali che la loro sezione con la superficie nel punto* (*che è triplo*) *ha una tangente doppia.*

7) *L'inverso dei prodotti delle distanze dei loro* 4 *centri dallo* S_5 *2-osculatore* (*quindi dal centro ombelicale, e* NON *da* P), *per quanto involga derivate terze, è un invariante* (*assoluto*) *per deformazioni di* 2ª *specie ed è espresso da una frazione che ha per numeratore l'invariante Gaussiano* (*relativo*) *della* 3ª *forma fondamentale,*

$$4\,(L_{30}\,L_{12} - L^2_{21})\,(L_{21}\,L_{03} - L^2_{12}) - (L_{30}\,L_{03} - L_{21}\,L_{12})^2,$$

quindi

8) *se quest'invariante è nullo una almeno delle distanze indicate diviene infinita.*

Ma di più si possono caratterizzare proiettivamente le superficie (sempre di S_6) per le quali ciò accade. Infatti

9) *se i tre sistemi di quasi-asintotiche di una superficie di* S_6 *determinati su di essa dagli* S_5 *2-osculatori* (*cioè aventi per tangenti in ciascun punto le tangenti nel punto triplo della sezione determinata dallo* S_5) *si riducono a* DUE *soli distinti, cioè se esiste un sistema doppio di quasi-asintotiche, allora essa ha l'invariante Gaussiano per deformazioni di* 2ª *specie nullo; e viceversa.*

Se poi si avesse un solo sistema (triplo) di quasi-asintotiche, si annullerebbe, oltre l'invariante, il covariante Gaussiano e si ritroverebbe un risultato contenuto nella Nota II, n. 4.

5. È evidente l'analogia delle proprietà esposte in 6)-9) per le superficie di S_6 (in rapporto alle deformazioni di 2ª specie) con le proprietà delle superficie di S_3 (in rapporto alle ordinarie applicabilità).

Come per le superficie di S_3 (e soltanto per queste) si può dare una interpretazione geometrica della curvatura di Gauss per mezzo di misure eseguite nell'ambiente (fuori, quindi, della superficie) così per le superficie di S_6 si può costruire con elementi esterni ad esse un'interpretazione geo-

metrica dell'invariante Gaussiano relativo alla 3ª forma fondamentale; e il suo annullarsi è messo in rapporto [con le 8) 9)] ad un fatto proiettivo analogo a quello che caratterizza le sviluppabili. E anche qui, come per l'annullarsi della curvatura Gaussiana, il fatto metrico sussiste *sempre* in conseguenza della specializzazione proiettiva della superficie, ma non viceversa: solo per determinate dimensioni dell ambiente (3 se si tratta di deformazioni di 1ª specie, 6 per quelle di 2ª) il fatto proiettivo è necessaria conseguenza di quello metrico.

6. Rappresentazione sferica delle superficie di S_6.

Si può fare una rappresentazione della superficie sull'ipersfera di raggio 1 servendosi delle normali agli S_5 2-osculatori alla superficie. È notevole il fatto che l'analogia ora messa in evidenza (fra le superficie di S_3 considerate rispetto alle applicabilità, e quelle di S_6 per le def. di 2ª specie) si conserva e si ha:

Il limite cui tende il rapporto fra l'area di un pezzo della superficie data e la corrispondente della superficie rappresentativa, al tendere della prima a zero, è un invariante Gaussiano (assoluto) per deformazioni di 2ª specie.

S'introducano le tre forme simboliche

$$L_3^{(u)} \equiv L_{30}\,du^2 + 2\,L_{21}\,du\,dv + L_{12}\,dv^2$$

$$L_3^{(v)} \equiv L_{21}\,du^2 + 2\,L_{12}\,du\,dv + L_{03}\,dv^2$$

(derivate dalla 3ª forma fondamentale L_3; v. Note precedenti)

$$C \equiv C_{20}\,du^2 + 2\,C_{11}\,du\,dv + C_{02}\,dv^2$$

nella quale i coefficienti sono le matrici ottenute da D_2 sopprimendovi successivamente le linee con le $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}$, divise per $EG - F^2$; e s'indichino con $\omega^2(L_3^{(u)}, C)$. $\omega^2(L_3^{(v)}, C)$ le 2ᵉ spinte (invarianti simultanei) fra ciascuna delle prime due e la terza: detti e, f, g i coefficienti del ds'^2 della superficie rappresentativa sull'ipersfera è

$$ds'^2 = \frac{(EG - F^2)^2}{D_2^2}\left\{[\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,du^2 + 2\,\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)\,du\,dv + [\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2\,dv^2\right\}$$

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \left[\frac{(EG - F^2)^{3/2}}{D_2^2}\right]^2 \left\{[\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,[\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2 - [\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2\right\}.$$

Nell'ultima parentesi $\{\ \}$ si possono far figurare i prodotti

$$(L_{3-\rho,\rho}\, L_{2\tau,\tau+1} - L_{2-\rho,\rho+1}\, L_{3-\tau,\tau})\,(L_{3-\sigma,\sigma}\, L_{2-\varepsilon,\varepsilon+1} - L_{2-\sigma,\sigma+1}\, L_{3-\varepsilon,\varepsilon}),$$

il che mette chiaramente in evidenza il carattere invariantivo del rapporto studiato per deformazioni di 2^a specie, pur essendo costruito con i coefficienti di L_3 (Nota I, n. 2).

7. A complemento di quanto precede e per metterne in luce l'interesse generale è da osservarsi che se una superficie di S_n ha come spazio $(\nu - 1)$-osculatore generico un S_ρ $(\rho < n)$, mentre lo spazio ν-osculatore coincide con S_n, *non* sono movimenti tutte le deformazioni di specie $< \nu$, mentre lo sono quelle di specie ν.

Interpretazioni esterne (con costruzioni nell'ambiente) degli invarianti gaussiani per deformazioni di specie $\nu - 1$ si hanno per modelli della superficie in S_n con $n = \rho + 1$.

I numeri ρ e ν sono *invarianti proiettivo-differenziali* della superficie; da ciò hanno origine i legami già incontrati o semplicemente accennati [1] fra proprietà proiettive e metriche nella teoria delle deformazioni.

Matematica. — *Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Sia un cilindro circolare di raggio 1 ed altezza a avente per asse l'asse delle z. Scopo della presente Nota è di determinare la funzione armonica $V(r, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ simmetrica rispetto all'asse z, che prende in superficie determinati valori. Questi saranno dati sulle basi $z = 0$, $z = a$ da due funzioni $f(r)$, $\varphi(r)$ che si suppongono continue e sviluppabili in serie di funzioni cilindriche nell'intervallo $(0, 1)$ e precisamente sia

$$(1) \qquad V(r, 0) = f(r) = A_0 + \sum_1^\infty A_n\, I_0(\alpha_n r),$$

$$(2) \qquad V(r, a) = \varphi(r) = B_0 + \sum_1^\infty B_n\, I_0(\alpha_n r),$$

dove $I_0(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine zero, e α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ le radici della $I_0'(x) = 0$. Questi sviluppi sono convergenti in tutto l'intervallo, estremi compresi, e dànno anche per $r = 1$ i valori $f(1 - 0) = f(1)$, $\varphi(1 - 0) = \varphi(1)$ [3].

[1] V. le mie Note: *Determinazione delle superficie* ecc. [Ist. Lombardo, vol. LII, 1919, fasc. 16-18].

[2] Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

[3] Vedi Dini, *Sulla serie di Fourier*. Pisa, 1880, pag. 189 e segg.

I valori della funzione $V(r, z)$ sulla superficie laterale siano dati da una funzione $\psi(z)$ continua e che si suppone sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo $(0, a)$: dovrà essere dunque

$$(3) \qquad V(1, z) = \psi(z) \quad \text{con} \quad f(1) = \psi(0) \ , \ \varphi(1) = \psi(a) \, ,$$

le due ultime esprimendo che la ψ si attacca con continuità alle f, φ, passando dalla superficie laterale alle basi.

1. Determinazione formale della V. — La $V(r, z)$ soddisfa alla equazione

$$(4) \qquad \Delta^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \, ;$$

di questa considero i seguenti tre tipi fondamentali di soluzioni:

$$\alpha z + \beta \ , \ (C e^{kz} + D e^{-kz}) \, I_0(kr) \ , \ E \operatorname{sen} Kz \, I_0(iKr) \, ,$$

(con $\alpha, \beta, C, D, E, k, K$ costanti arbitrarie) delle quali la prima evidente, la seconda ben nota [1], mentre la terza si ottiene dalla seconda ponendo $k = iK$, $C = -D = \frac{E}{2}$. Si osservi che $I_0(ix)$ è reale essendo $I_0(x)$ funzione pari. Poniamo allora

$$(5) \qquad V(r, z) = \alpha z + \beta +$$

$$+ \sum_1^\infty E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a} \, I_0 \left(i \frac{n\pi r}{a} \right) + \sum_1^\infty (C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z}) \, I_0(\alpha_n r) \, ,$$

dove le α_n hanno il significato detto prima, e $\alpha, \beta, E_n, C_n, D_n$ sono costanti da determinarsi. Dalla (5) per le (1) (2) avremo

$$V(r, 0) = \beta + \sum_1^\infty (C_n + D_n) \, I_0(\alpha_n r) = A_0 + \sum A_n \, I_0(\alpha_n r) \, ,$$

$$V(r, a) = \alpha a + \beta + \sum_1^\infty (C_n^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a}) \, I_0(\alpha_n r) = B_0 + \sum B_n \, I_0(\alpha_n r) \, ,$$

quindi per l'univocità degli sviluppi

$$(6) \qquad \begin{cases} \beta = A_0 \ , \ \alpha = \dfrac{B_0 - A_0}{a} \, , \\ C_n + D_n = A_n \ , \\ C_n e^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a} = B_n \ , \end{cases}$$

[1] Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, 1881, tomo II; oppure *Opere*, tomo III.

e di qui

$$(6') \qquad C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z} = \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}.$$

Rimarranno da determinarsi i coefficienti E_n. Consideriamo perciò la funzione

$$(7) \qquad F(z) = \frac{B_0 - A_0}{a} z + A_0 +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}} \cdot I_0(\alpha_n)$$

formata dalla parte lineare e dall'ultimo termine di V in (5) facendovi $r = 1$.

La funzione $\psi(z) - F(z)$ si annulla per le (1), (2), (3) per $z = 0$ e $z = a$: sviluppiamola in serie di Fourier (prolungandola come funzione dispari tra 0 e $-a$): avremo

$$(8) \qquad \psi(z) - F(z) = \sum_1^\infty E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a}.$$

Se vogliamo quindi che sia soddisfatta la prima delle (3) dovrà essere

$$(9) \qquad E_n = \frac{E'_n}{I_0\left(i\frac{n\pi}{a}\right)},$$

e con ciò il problema è formalmente risolto dalla (5) tenendo conto delle (6) (6') (7) (8) (9).

2. Validità della soluzione. — Dimostriamo in primo luogo che la serie (7) è equiconvergente nell'intervallo $(0, a)$ inclusi gli estremi. Spezziamo perciò la serie nella somma di quattro altre di cui la prima è

$$(10) \qquad \sum A_n I_0(\alpha_n) \cdot H_n \quad \text{con} \quad H_n = \frac{e^{\alpha_n(a-z)}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}.$$

I numeri H_n sono positivi, qualunque sia z $(0 \leq z \leq a)$ e decrescenti al crescere di n, come si vede facilmente osservando che $H_n = e^{-\alpha_n z} \cdot K_n$ con

$$K_n = \frac{e^{\alpha_n a}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}},$$

e che

$$K_{n+1} - K_n = -\frac{e^{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a} - e^{-(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a}}{(e^{\alpha_{n+1} a} - e^{-\alpha_{n+1} a})(e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a})} < 0.$$

Consideriamo allora la serie convergente $\sum A_n I_0(\alpha_n)$ e, preso ε piccolo a piacere, determiniamo n in modo che

$$\left| \sum_{i=1}^{p} A_{n+i} I_0(\alpha_{n+i}) \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Applicando il lemma di Abel (1), avremo

$$(11) \qquad \left| \sum_{i=1}^{p} A_{n+i} I_0(\alpha_{n+i}) H_{n+i} \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} H_{n+1} < \varepsilon \ , \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

per la relazione precedente e perchè $\frac{H_{n+1}}{K_1} < 1$: quindi la (10) è equiconvergente per $0 \leq z < a$. Ragionando in modo analogo per le altre tre serie si dimostra completamente la nostra asserzione.

La stessa dimostrazione leggermente modificata mi permette di asserire che la seconda serie nella (5) è equiconvergente in tutto il rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$.

Ritornando alla (7), questa come serie equiconvergente di funzioni continue rappresenta una funzione continua: questa è altresì sviluppabile in serie di Fourier. Infatti o essa non ha infiniti massimi e minimi e quindi, pel noto criterio di Dirichlet, è sviluppabile; nel caso contrario basta dimostrare, seguendo un criterio del Lipsichtz (2), che in ciascuno di questi eventuali punti β si ha per δ sufficientemente piccolo

$$| F(\beta + \delta) - F(\beta) | < A\delta^{\alpha}$$

essendo A una costante e α un numero positivo. La dimostrazione non è difficile applicando i criterî precedenti, quindi per brevità la tralascio.

Ammesso questo, sarà valida la (8) e la serie del secondo membro sarà equiconvergente nell'intervallo $0 \leq z \leq a$. Ma allora la seconda serie nella (5) diventa

$$(12) \qquad \sum E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a} \cdot \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)} .$$

Ora, questa serie si ottiene dalla (8) moltiplicandone i termini per i numeri

$$L_n = \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)} .$$

Si osservi che

$$0 < L_n \leq 1 \qquad (0 \leq r \leq 1),$$

e che inoltre

$$L_{n+1} \leq L_n ,$$

(1) Vedi Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*. Torino, 1884, pag. 126.
(2) Vedi Picard, *Traité d'Analyse*, tomo I, 2ª ediz., pag. 245.

come si trova facilmente calcolando da $\frac{dL_n}{dn}$ (si considera n come variabile continua) e facendo vedere che essa è negativa: basta perciò sostituire a $I_0(ix)$ la sua espressione $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$.

Ma allora, applicando il lemma di Abel, si può dimostrare che la serie (12) è equiconvergente nel rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$: quindi la nostra (5), che è formata di serie equiconvergenti i cui termini sono funzioni armoniche, è, come è ben noto, una funzione armonica e soddisfa alle condizioni poste.

Chimica. — *Sulla trasformazione della magnesia leggera in magnesia pesante* [1]. Nota di N. Parravano e C. Mazzetti, presentata dal Socio E. Paternò [2].

È noto che la magnesia, quando venga calcinata, subisce una forte diminuzione di volume. Nei refrattari di magnesia che si usano nei forni metallurgici deve perciò, prima della messa in opera, provocarsi la trasformazione di MgO dalla forma meno densa in quella più densa.

Questa trasformazione è irreversibile ed è stata attribuita all'esistenza di due forme di ossido di magnesio le quali, oltre al peso specifico, hanno pure altre proprietà fisiche e chimiche differenti [3].

In che rapporto le due forme stiano fra loro e in che condizioni esse siano trasformabili l'una nell'altra non si conosce però con precisione. La prescrizione da tutti seguita di cuocere la magnesite a temperatura elevata prima di foggiarne refrattarî indica che la trasformazione della varietà leggera in quella pesante richiede un'alta temperatura per compiersi, mentre d'altra parte le misure di densità fatte da Ditte su MgO mantenuto a temperature crescenti da 350° a 1200° dimostrano la possibilità che la forma pesante si origini da quella leggera a temperature molto più basse di quelle comunemente adoperate in pratica per cuocere la magnesite.

La conoscenza delle condizioni esatte in cui si compie la trasformazione e delle cause che possono agire favorendola od ostacolandola sarebbe di notevole interesse, perchè essa potrebbe infatti dare utili indicazioni sul modo migliore come eseguire in pratica la cottura della magnesia.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(3) Ditte, C. R., *73*, 111, 191, 270 (1871); id., *76*, 108 (1877); Anderson, J. Ch. S., *87*, 257 (1905); Mellor, Trans. Cera. Soc., *16*, 1918, parte I, 89; Fearnsides, id. id., pag. 97.

Si è creduto perciò opportuno compiere in questo senso una serie di ricerche su magnesie derivanti da magnesiti italiane e confrontarne il comportamento con quello dell'ossido di magnesio proveniente da carbonato quasi puro, e ciò per stabilire l'influenza che esercitano le varie impurezze sempre presenti nelle magnesiti.

A questo scopo è stata esaminata la velocità con cui si idrata MgO derivante dalla scomposizione di carbonati di diversa provenienza, mantenuti per tempi diversi a temperature successivamente crescenti da 800° a 1400°.

È noto infatti che i refrattarî di magnesia debbono le loro eccellenti qualità, fra l'altro, anche alla proprietà di idratarsi lentamente a contatto dell'acqua. Infatti l'uso della calce, che pure potrebbe fornire buoni refrattarî, non si è mai esteso appunto per la facilità con cui essa si spegne anche nella forma più compatta che può ottenersi quando la si calcina in presenza di piccole quantità di fondente come argilla ed ossido di ferro.

Sulla velocità di idratazione dell'MgO si conoscono solo i risultati ottenuti da P. De Mille Campbell [1] idratando l'ossido proveniente dalla calcinazione a temperature successivamente crescenti — fino a 1450° — di una magnesite naturale contenente: 1,24 % SiO_2, 1,32 % $Fe_2O_3 + Al_2O_3$, 1,94 % CaO. Dalle sue esperienze Campbell ha concluso, fra l'altro, che tra 1000° e 1100° si verifica una variazione nella costituzione dell'ossido di magnesio accompagnata da diminuzione marcata della velocità di idratazione. Il Campbell perciò in sostanza ha confermato l'esistenza di due forme di magnesia e ne ha fissato — nel caso del prodotto da lui studiato — il punto di trasformazione intorno a 1100°.

È stato esaminato da noi il comportamento dell'ossido risultante da carbonati che avevano le composizioni seguenti:

	I	II	III	IV	V
MgO	40,85	41,86	41,54	44,10	44,04
CaO	2,58	2,96	1,60	1,07	3,25
$Fe_2O_3 + Al_2O_3$.	assente	3,31	0,88	1,84	0,88
SiO_2	assente	0,90	10,10	0,46	3,42
Perdita per calcina.	56,34	50,80	45,64	52,30	48,33

Il prodotto I è stato acquistato in commercio; il II era stato fornito dalla Società « Magnesite » di Castiglioncello e proveniva dagli scavi a giorno in località Poggio Nocini: il III proveniva dalle cave di magnesite della ditta Sclopis in località « Givoletto »; il IV era stato fornito dalla Società Magnesite di Val d'Elsa e proveniva dalla miniera « Querceto » in Casale d'Elsa; il V era stato fornito dalla stessa Società « Magnesite » di Casti-

[1] J. Ind. Eng. Ch., *1*, 665 (1909); id. id., *10*, 595 (1918).

glioncello ed era stato estratto dalla galleria Cacciaguerra in località Massaccio (1).

Le esperienze saranno descritte estesamente altrove; qui ci limitiamo a riportarne i risultati.

Si è trovato che la velocità di idratazione dell'MgO diminuisce:

1°) col crescere della temperatura di calcinazione,

2°) colla durata della calcinazione ad ogni temperatura,

senza che sia possibile osservare una discontinuità nella diminuzione di idratabilità in funzione della temperatura di cottura.

La velocità di idratazione dell'ossido proveniente dalla magnesite di Poggio Nocini (Castiglioncello) è molto minore che nel caso del carbonato puro, ed è influenzata in misura molto maggiore dalla durata di cottura. Tra 1000° e 1100° la velocità di idratazione, invece di continuare a diminuire in maniera regolare o diminuisce più lentamente o addirittura cresce per poi tornare a diminuire.

Evidentemente, tra 1000° e 1100°, si compiono reazioni fra gli ossidi di Mg e Ca e quelli di Si, Al, Fe con formazione di silicati, alluminati, ferriti, suscettibili non solo di idratarsi, ma di assorbire acqua in maggiore quantità e più facilmente di MgO e CaO.

Questi risultati permettono di trarre varie conclusioni:

1°) L'affermazione che l'ossido di magnesio si trasforma verso i 1600° (2) o verso i 1100° (3) è certamente inesatta. La trasformazione si inizia già alla prima temperatura da noi sperimentata (800°); a questa temperatura essa è però molto lenta. Questo risultato trova del resto conferma nelle determinazioni di densità eseguite da Ditte sopra MgO mantenuto per un certo tempo a temperature diverse. L'ossido leggero ha una densità di circa 3,2 e quello pesante di circa 3,7. Ebbene, la densità di quello leggero varia nella maniera seguente quando venga portato alle temperature indicate:

Temperature	350° (1 ora)	440° (1 ora)	560° (1 ora)	1200° (12 ore)
Peso specifico.	3,1932	3,2014	3,2482	3,5699

2°) Le magnesiti naturali contengono impurezze le quali esercitano una influenza notevole sulla volocità di idratazione dell'MgO che risulta dalla calcinazione di esse, agevolando la trasformazione nella forma pesante.

3°) La trasformazione della magnesia leggera in quella pesante è lenta a compiersi e diventa tanto più rapida quanto più alta è la temperatura.

(1) Alle società che ci hanno gentilmente favorito campioni dei loro minerali esprimiamo i nostri più vivi ringraziamenti.

(2) Le Chatelier, *Le chauffage*, pag. 399.

(3) Campbell, loc. cit.

Per effettuarla non basta calcinare la magnesia ad una data temperatura, ma occorre mantenere l'ossido per un determinato periodo di tempo alla temperatura in questione affinchè la trasformazione possa progredire in misura sufficiente (1).

4°) Non si è riscontrata una vera discontinuità nella diminuzione della velocità di idratazione in funzione della temperatura e della durata di cottura, per modo che sembra probabile che un punto di trasformazione della magnesia leggera in pesante non esista.

Probabilmente la magnesia leggera è amorfa e quella pesante cristallina (periclasio). La trasformazione dell'una varietà nell'altra si compie a tutte le temperature, e le impurezze accelerano il processo forse nella maniera già suggerita da Le Chatelier per le varie forme di quarzo in tridimite (2). La forma amorfa è meno stabile della cristallina a tutte le tempeture; essa perciò si scioglie nel flusso formato dalle impurezze generando soluzioni che sono soprassature rispetto alla forma cristallina, stabile, che così precipita.

(1) Mellor, loc. cit.
(2) C. R., *165*, 218 (1917).

G. C.